

การวิเคราะห์ทางคิเนแมติกส์และไดนามิกส์ของแขนกล PA10-7C Kinematics and Dynamics Analysis of the PA10-7C Manipulator Arm.

วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ^{1*} และ ณัฐศร พรหมเพชร¹

¹ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

254 พญาไท ปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทร 0-2218-6448, 0-2218-6585 โทรสาร 0-2218-6583 * e-mail: viboon.s@eng.chula.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการวิเคราะห์ทางคิเนแมติกส์ และไดนามิกส์ของแขนกลที่มีข้อต่อลักษณะข้อต่อหมุนเพิ่มขึ้นมาจากแขนกลปกติที่ใช้กันอย่างแพร่หลายเป็นแขนกลที่มีข้อต่อเป็นเจ็ดข้อต่อเพื่อเพิ่มความสามารถของแขนกลปกติมากขึ้นในหลายๆด้าน โดยใช้วิธีการเพิ่มแกนหมุนอิสระระหว่างส่วนปลายแขนและส่วนแกนพรมอ้างอิง 0 ขึ้นมาเพื่อสามารถเลือกการเคลื่อนที่ได้หลากหลายผ่านแกนอิสระนี้เพื่อสามารถหลบหลีกปัญหาข้างต้นได้ โดยได้ทำการวิเคราะห์หาสมการ ฟอว์เวิร์สติกเนแมติกส์ อินเวอร์สติกเนแมติกส์ สมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว เพื่อสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่ง และความเร็วของการเคลื่อนที่ที่ปลายแขนมาตั้งแต่ข้อต่อแรกได้ ได้วิเคราะห์สมการการเคลื่อนที่ โดยการวิเคราะห์นี้จะเป็นการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของแขนกลที่มีลักษณะการตั้งแกนแบบ spherical wrist หรือ zero joint offsets เป็นการตั้งแกนแบบเดียวกับแขนกล Mitsubishi Heavy Industries PA10-7C ซึ่งใช้ในงานวิจัยนี้ งานวิจัยนี้ได้ทดลองความถูกต้องของสมการทางคิเนแมติกส์ซึ่งประกอบด้วยสมการฟอว์เวิร์สติกเนแมติกส์ สมการอินเวอร์สติกเนแมติกส์ และ สมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว ด้วยการจำลองการเคลื่อนที่ (simulation) และ ทดสอบจริงกับแขนกล PA10-7C และ การวิเคราะห์ทางไดนามิกส์ ได้หาความถูกต้องของสมการการเคลื่อนที่จากคุณสมบัติ skew symmetric matrix ของสมการ $\dot{B}(q) - 2C(q, \dot{q})$ ทำให้ทราบว่าสมการการเคลื่อนที่มีโครงสร้างที่ถูกต้อง และ ตรวจสอบความเสถียร ของสมการโดยจำลองเส้นทางการเคลื่อนที่ที่ส่งไปยังสมการการเคลื่อนที่เพื่อคำนวณค่าแรงบิดของแต่ละข้อต่อ

Abstract

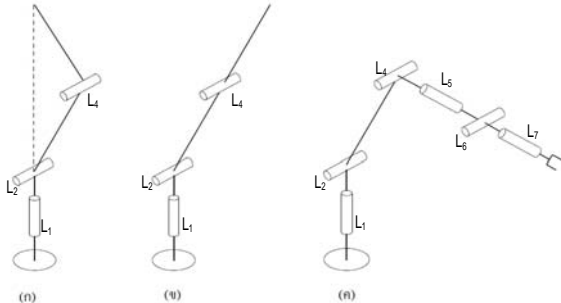
This paper presents an analysis of kinematics and dynamics of an anthropomorphic 7-DOF serial link spatial manipulator with revolute joints. The redundancy is parameterized by a scalar variable which corresponds to the angle between the arm plane and a reference plane. Analysis of forward and inverse kinematics is for evaluate the relationship between joint angles

and end-effector positions based on working coordinate system and vice versa. And the mapping between the joint velocity and end-effector velocity based on working coordinate system are described by the derived augmented Jacobian matrix. We also derive the dynamic model. All the derivations are done for the 7-DOF manipulator arm with a spherical wrist and zero joint offsets, the PA10-7C Mitsubishi Heavy industries arm. The purposed of the experiments are to ensure the accuracy of the derived equations both kinematics and dynamic equations. By comparing simulation results from the PA10-7C with the derived kinematics: the forward equations, the inverse equations, and the Jacobian matrix based on the joint coordinate system and the working coordinate system. For correctness of the derived dynamic model, we can guarantee the skew symmetric matrix of the matrix $\dot{B}(q) - 2C(q, \dot{q})$ and also by investigate result motions by simulation.

1. คำนำ

ปัจจุบันการใช้งานหุ่นยนต์มีความหลากหลายและผู้ใช้มีความต้องการความสามารถในการเข้าถึงตำแหน่งที่ต้องการ (Workspace หรือ working area) มากขึ้น โดยเฉพาะเมื่อมีสิ่งกีดขวางเข้ามาขวางทางเคลื่อนที่ ดังนั้น ด้วยข้อจำกัดของหุ่นยนต์แบบ 5 แกน และ 6 แกน ซึ่งเป็นที่นิยมใช้กันในอุตสาหกรรมจึงไม่เหมาะกับการใช้งานเท่าไรนัก ได้มีงานวิจัยหลายๆ เรื่องที่พยายามจะออกแบบหุ่นยนต์เพื่อให้มีความสามารถในการหลีกเลี่ยงและแก้ปัญหาเหล่านี้ คือ เพิ่มความสามารถในการจัดการการเคลื่อนที่ผ่านจุด singularity ดังรูปที่ 1 , หลีกเลี่ยงการเคลื่อนที่ชนกันเองของแขนกล (collision avoidance), เอื้อประโยชน์ในการใช้งานและควบคุม (enhancement of mechanical advantage), เพื่อให้สามารถเคลื่อนที่ที่ดีมากขึ้น (manipulability enhancement), เพิ่มสมรรถนะในการทำงาน (subtask performance) จึงทำการศึกษาระบบ คิเนแมติกส์ และ ไดนามิกส์ ของแขนหุ่นยนต์ประเภท redundant robot โดยจะครอบคลุมการหาสมการฟอว์เวิร์สติก

เนแมติกส์ อินเวอร์สคิเนแมติกส์ จาโคเบียน และ สมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ เพื่อหาพารามิเตอร์ที่จำเป็น เช่น ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแต่ละจุดต่อ หน้าหน้าของแต่ละจุดต่อ เป็นต้น เพื่อไปประยุกต์ใช้ต่องานวิจัยขั้นสูงในอนาคตต่อไป โดยจะใช้หุ่นยนต์แขนกล Mitsubishi heavy industries ltd. รุ่น PA10-7C ในงานวิจัย



รูปที่ 1: ตำแหน่งที่เกิด singularity ของแขนกล 6 จุดต่อ โดย (ก) จุด singularity ที่เกิดในตำแหน่งที่ข้อม้อมีตำแหน่งตรงกับหัวไหล่ (ข) จุด singularity ที่เกิดในตำแหน่งที่ข้อศอกวางตัวเหยียดตรง (ค) จุด singularity ที่เกิดในตำแหน่งที่ข้อมือวางตัวเหยียดตรง

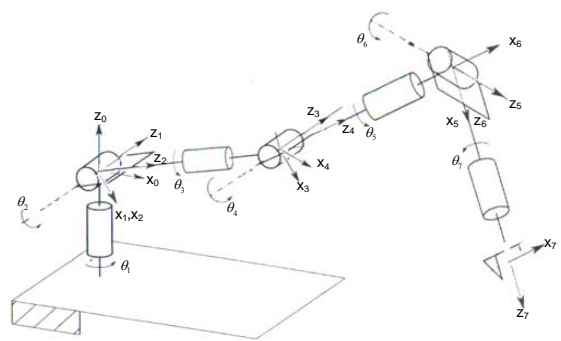
2. สมการทางคิเนแมติกส์

หุ่นแขนกลที่ใช้ในงานวิจัยคือหุ่นยนต์แขนกล Mitsubishi heavy industries, Ltd. รุ่น PA10-7C ถูกออกแบบตัวควบคุมให้สามารถที่จะโปรแกรมลักษณะเฉพาะของการเคลื่อนที่จากสมการต่างๆ เป็นลักษณะ open architecture โดยใช้ภาษาซีพลัสพลัส (C++) ทำให้มีความยืดหยุ่นในการใช้งานสูงและที่สำคัญ แขนกล PA10-7C ยังมีแกนเพิ่มมาอีก 1 แกนคือแกนที่ 7 (redundant axis) เพิ่มมาในตำแหน่งที่ดีที่สุด [1] ดังนั้นงานวิจัยนี้จะทำการหาค่าสมการต่างๆ สำหรับแขนกล PA10-7C หรือแขนกลที่มีลักษณะโครงสร้างแบบเดียวกัน ในด้านของ คิเนแมติกส์ ซึ่งประกอบด้วย

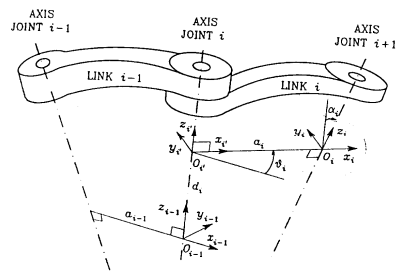
2.1 สมการฟอร์เวิร์ดคิเนแมติกส์ (forward kinematics)

เริ่มจากการตั้งแกนลงบนแขนกล PA10-7C โดยจะทำการตั้งแกนในลักษณะ zero-offset robot เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณในหัวข้อถัดไป ซึ่งจะได้ลักษณะการตั้งแกนบนแขนกล PA10-7C ดังรูปที่ 2 และจากการตั้งแกนในรูปที่ 2 สามารถกำหนดพารามิเตอร์ต่างๆ ในตาราง Denavit-Hartenberg [2] ได้ดังตารางที่ 1 โดยค่าพารามิเตอร์ต่างๆกำหนดตามรูปที่ 3 ดังนี้

- a_i แทนระยะระหว่างแกน z_{i-1} และ แกน z_i โดยคิดทิศตามแกน x_i
- α_i แทนขนาดของระหว่างแกน z_{i-1} และ แกน z_i โดยคิดทิศตามกฎมือขวาตามแกน x_i
- l_i แทนระยะระหว่างแกน x_{i-1} และ แกน x_i โดยคิดทิศตามแกน z_{i-1}
- θ_i แทนขนาดของระหว่างแกน x_{i-1} และ แกน x_i โดยคิดทิศตามกฎมือขวาตามแกน z_{i-1}



รูปที่ 2: การตั้งแกนต่างๆลงบนแขนกล PA10-7C



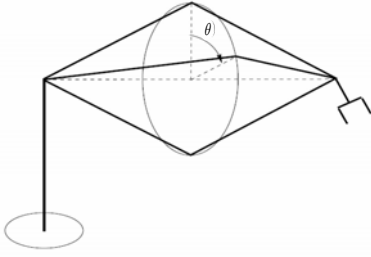
รูปที่ 3: การติดแกนบนจุดต่อ และ รายละเอียดของพารามิเตอร์ต่างๆแบบ Denavit-Hartenberg convention

ตารางที่ 1 DH พารามิเตอร์ของแขนกล PA10-7C

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-\pi / 2$	0	θ_1
2	0	$\pi / 2$	0	θ_2
3	0	$-\pi / 2$	l_3	θ_3
4	0	$\pi / 2$	0	θ_4
5	0	$-\pi / 2$	l_5	θ_5
6	0	$\pi / 2$	0	θ_6
7	0	0	0	θ_7

2.2 การวิเคราะห์อินเวอร์สคิเนแมติกส์ (inverse kinematics)

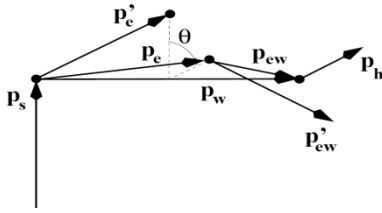
การหาสมการทางคณิตศาสตร์ทางอินเวอร์สคิเนแมติกส์ของแขนกลที่มีแกนมากกว่า 6 แกนนั้นโดยปกติจะเป็นการคำนวณและใช้ความรู้ทาง quadratic optimization [5] ในการคำนวณเพื่อนำสมการเหล่านั้นมาควบคุมการเคลื่อนที่ของแขนกล แต่ในปัจจุบันได้มีวิธีที่เป็นที่ยอมรับและมีการใช้อย่างแพร่หลายในการหาสมการทางอินเวอร์สคิเนแมติกส์เพื่อให้ได้สมการโดยตรง [1], [2], [7] โดยใช้วิธีการกำหนดแกนขึ้นระหว่างส่วนหัวไหล่ และ ข้อมือ ตามรูปที่ 4 และคำนวณสมการอินเวอร์สคิเนแมติกส์ให้สามารถควบคุมหุ่นและมุมการหมุนรอบแกนใหม่นี้ได้ เพื่อที่จะสามารถนำความสามารถในการหมุนรอบแกนใดๆนี้ มาใช้เป็นประโยชน์ในการเคลื่อนที่ผ่านสิ่งกีดขวาง และ ผ่านตำแหน่งที่จะเกิด singularity ได้



รูปที่ 4: การเคลื่อนที่แขนกลรอบแกนระหว่างหัวไหล่-ข้อมือ

ขั้นตอนการหาสมการอินเวอร์สคิเนแมติกส์ของแขนกล 7 แขน ได้ทำการประยุกต์การหาสมการอินเวอร์สคิเนแมติกส์ของแขนกล 6 แขน ซึ่งมีลักษณะการหาได้หลายวิธี เช่น การหาสมการอินเวอร์สคิเนแมติกส์ของหุ่น PUMA-560 [2] ซึ่งเป็นที่นิยมใช้ แต่เนื่องจากวิธีดังกล่าวยากที่จะประยุกต์มาใช้ในการหาสมการอินเวอร์สคิเนแมติกส์ของแขนกล 7 แขน ดังนั้นสมการอินเวอร์สคิเนแมติกส์ของงานวิจัยนี้จึงเป็นลักษณะการประยุกต์การหาอินเวอร์สคิเนแมติกส์ของแขนกล 6 แขน ของ [3]

โดยกำหนดให้ \mathbf{p}_s คือ เวกเตอร์จากพื้นถึงหัวไหล่ (shoulder) โดยตำแหน่งต่าง ๆ ตามรูปที่ 5 ให้ \mathbf{p}_s แทนตำแหน่งหัวไหล่ของแขนกล \mathbf{p}_e แทนตำแหน่งข้อศอกของแขนกล และ \mathbf{p}_w แทนตำแหน่งข้อมือของแขนกล



รูปที่ 5: แขนกลในรูปแบบสัญลักษณ์เวกเตอร์

ขั้นที่ 1 : หาตำแหน่งของข้อมือ (wrist) ของแขนกลก่อน โดยกำหนดตำแหน่ง \mathbf{p} (position) และ เมทริกซ์การหมุน \mathbf{R} (rotation matrix) ที่ต้องการของปลายแขน ตำแหน่งของข้อมือของแขนกล \mathbf{p}_w จะหาได้ ดังนี้ (จาก รูปที่ 3.3 และ 3.4) โดยกำหนดให้เครื่องหมาย (') คือตำแหน่งที่ $\theta = 0$ จะได้

$$\mathbf{p}_w = \mathbf{p} - \mathbf{R}^T \mathbf{p}_h - \mathbf{p}_s$$

โดย ${}^T \mathbf{p}_h$ คือ เวกเตอร์จากตำแหน่งข้อมือ ถึง ปลายแขนกล โดยยึดตาม Coordinate Frame ของจุดต่อที่ 7

ขั้นที่ 2: หามุมของจุดต่อ 4 จุดต่อ แรก โดยลักษณะการคำนวณจะคล้ายกับการหา แขนกล 6 แขน [3] โดยจะคำนวณดังนี้

ขั้นที่ 2.1 : กล่าวคือ ในขั้นนี้จะกำหนดให้ $\theta_3 = 0$ ก่อน ก็ จะเหลือแกนที่จะพิจารณาให้เคลื่อนที่ไปยังตำแหน่งที่ต้องการเพียง 3 แกนแรกเท่านั้น ดังนี้

ตำแหน่งหัวไหล่ (\mathbf{p}_s), ตำแหน่งข้อศอก (\mathbf{p}_e), ตำแหน่งข้อมือ (\mathbf{p}_w) และ ปลายแขน (\mathbf{p}_h) จะได้

$$\theta_1' = \text{Atan2}(p_{wy}, p_{wx})$$

และจะได้

$$\sin \theta_4 = \frac{l_3^2 + l_5^2 - |\mathbf{p}_w|^2}{2l_3l_5}$$

โดยให้เครื่องหมาย (') คือตำแหน่งที่ $\theta = 0$ ตามรูป 4

\mathbf{p}_w สามารถหาในเทอมของ coordinate frame ที่ 1 ได้จากเมทริกซ์การหมุน ของ 6 แกนแรก จากสมการฟอร์เวิร์สคิเนแมติกส์ที่หา มาข้างต้น คือ

$$\mathbf{R}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & 0 & \pm s\theta_i \\ s\theta_i & 0 & \mp c\theta_i \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น มุมการหมุนของ θ_2' ได้จาก

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{p}_w' &= (\mathbf{A}_1^0)^T \mathbf{p}_w \text{ จะได้} \\ \sin \theta_2' &= \frac{{}^1p_{wy}'(l_3 - l_5 \sin \theta_4) - {}^1p_{wx}'l_5 \cos \theta_4}{l_3^2 + l_5^2 - 2l_3l_5 \sin \theta_4} \\ \cos \theta_2' &= \frac{{}^1p_{wx}' + l_5 \cos \theta_4 \sin \theta_2'}{l_3 - l_5 \sin \theta_4} \\ \theta_2' &= \text{Atan2}(\sin \theta_2', \cos \theta_2') \end{aligned}$$

ขั้นที่ 2.2 : หาตำแหน่งของข้อศอกโดยหมุนจุดข้อศอกรอบแกนเวกเตอร์ \mathbf{p}_w เป็นมุม θ โดยหาตำแหน่งของข้อศอก โดยยึดให้ $\theta = 0$ ก่อน ได้

$$\mathbf{p}'_e = \mathbf{A}'_1 \mathbf{A}'_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{bmatrix} = l_3 \begin{bmatrix} c\theta'_1 s\theta'_2 \\ s\theta'_1 s\theta'_2 \\ -c\theta'_2 \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}_w}{|\mathbf{p}_w|}$ และจากการแก้สมการตำแหน่งของข้อศอก โดยใช้ Rodrigues rotation formula จะได้

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}'_e)(1 - c_\theta) + \mathbf{p}'_e c_\theta + \mathbf{n} \times \mathbf{p}'_e s_\theta$$

ขั้นที่ 2.3 : หามุมการหมุนของ 2 แกนแรก ได้ ดังนี้:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \text{Atan2}(p_{ey}, p_{ex}) \\ \theta_2 &= \text{Atan2}\left(\sqrt{p_{ex}^2 + p_{ey}^2}, -p_{ez}\right) \end{aligned}$$

ขั้นที่ 2.4 : หามุมการหมุน θ_3 โดยพิจารณาตำแหน่งของข้อมือ ที่จะเกิดขึ้นถ้า $\theta_3 = 0$ หาได้จาก

$$\mathbf{p}'_{ew} = l_5 \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 \mathbf{A}_4^3 \mathbf{z}_4 \text{ ซึ่งในความเป็นจริงจุดข้อมือจะ}$$

วางตัวอยู่ที่ตำแหน่ง $\mathbf{p}_{ew} = \mathbf{p}_w - \mathbf{p}_e$ ดังนั้นจะได้

$$\theta_3 = \text{Atan2}\left(|\mathbf{p}'_{ew} \times \mathbf{p}_{ew}|, \mathbf{p}'_{ew} \cdot \mathbf{p}_{ew}\right)$$

ขั้นที่ 3 : หาตำแหน่งของมือ (hand) ที่ต้องการการคำนวณจะคล้ายกับการคำนวณในแขนกล 6 แกน [3] ต่างกันคือมีการเพิ่มแกน

หมุนที่ 3 เข้ามา ดังนี้ $\mathbf{R}_7^4 = (\mathbf{R}_4^0)^T \mathbf{R}_7^0$

ซึ่ง \mathbf{R}_4^0 หาได้จากค่ามุม ทั้ง 4 ค่าที่ได้จาก ขั้นตอนที่ 2 คือ

$$\mathbf{R}_7^4 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_3^2 \mathbf{R}_4^3$$

ขั้นที่ 4 : หา มุมการหมุน $(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7)$ ที่ข้อมือ โดยใช้ ความสัมพันธ์ดังนี้ [Hollerbach and Sahar, 1983]

ซึ่งจากการแก้สมการข้างต้นทำให้สามารถหาความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่จากในรูปของตำแหน่ง และ ทิศทางที่ต้องการ หรือ ทราบส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์มาเป็นลักษณะของมุมที่ต้องเคลื่อนที่ของแกนทั้ง 7 แกน ในทอมของ θ

2.3 การวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงความเร็ว

การหาเมทริกซ์จาโคเบียน (jacobian matrix) ซึ่งเป็น เมทริกซ์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงความเร็วระหว่างการเคลื่อนที่ใน Cartesian space และ joint space สามารถหาได้โดยการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของความสัมพันธ์เชิงตำแหน่ง ดังนี้

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}}$$

โดย $\dot{\mathbf{X}}$ คือ ความเร็วของปลายแขนกล

$\dot{\boldsymbol{\theta}}$ คือ ความเร็วของการเคลื่อนที่ของแกนต่างๆในแขนกล

\mathbf{J} คือ เมทริกซ์ จาโคเบียน

โดยค่าเมทริกซ์จาโคเบียนหาได้

จากการวิเคราะห์ฟอร์เวิร์ดคิเนแมติกส์เราจะได้ความสัมพันธ์ของตำแหน่งและมุมการหมุนของปลายแขนในรูปของมุมของแกนต่างๆ

$$\begin{cases} x_1 = f_1(\theta_1, \dots, \theta_n) \\ \vdots \\ x_n = f_n(\theta_1, \dots, \theta_n) \end{cases}$$

ค่า เมทริกซ์จาโคเบียน สามารถหาได้จาก [2]

$$\mathbf{J}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}$$

3. สมการทางไดนามิกส์

การควบคุมแรงสามารถควบคุมได้ด้วยอีก 2 วิธี คือการควบคุมแรงแบบ indirect force control และการควบคุมแรงแบบ direct force control นอกจากนั้นในตัวของเราที่ต้องการตั้งเป้าหมายของการควบคุมได้ 2 แบบ คือแบบ regulation และแบบ tracking ในสองแบบจะเห็นว่า สมการไดนามิกส์ของแขนกลมีส่วนสำคัญในการควบคุมแรงดังกล่าว ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่จะต้องทำการวิเคราะห์สมการไดนามิกส์ หรือ สมการการเคลื่อนที่เพื่อที่จะเป็นพื้นฐานที่จะนำไปใช้ในการควบคุมแขนกลลักษณะนี้

โดยหนึ่งในวิธีที่เป็นที่นิยมใช้ในการวิเคราะห์สมการการเคลื่อนที่ คือ วิธีการของ Lagrange [2] โดยสมการการเคลื่อนที่ของแขนกลสามารถเขียนในรูปแบบดังนี้

$$\xi_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk}(q) \dot{q}_k \dot{q}_j + g_i(q)$$

โดยที่

$$h_{ijk} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}$$

$$\begin{aligned} g_i(q) &= \frac{\partial U}{\partial q_i} \\ &= - \sum_{j=1}^n \left(m_{ij} \mathbf{g}_0^T \frac{\partial \mathbf{p}_{ij}}{\partial q_i} + m_{mj} \mathbf{g}_0^T \frac{\partial \mathbf{p}_{mj}}{\partial q_i} \right) \\ &= - \sum_{j=1}^n \left(m_{ij} \mathbf{g}_0^T \mathbf{J}_{pi}^{(ij)}(q) + m_{mj} \mathbf{g}_0^T \mathbf{J}_{pi}^{(mi)}(q) \right) \end{aligned}$$

และ

$$\mathbf{B}(q) = \sum_{i=1}^n \left(m_{ij} \mathbf{J}_p^{(ijT)} \mathbf{J}_p^{(ij)} + \mathbf{J}_0^{(ijT)} \mathbf{R}_i \mathbf{I}_i \mathbf{R}_i^T \mathbf{J}_0^{(ij)} + m_{mi} \mathbf{J}_p^{(miT)} \mathbf{J}_p^{(mi)} + \mathbf{J}_0^{(miT)} \mathbf{R}_m \mathbf{I}_m \mathbf{R}_m^T \mathbf{J}_0^{(mi)} \right)$$

เมื่อ b_{ij} คือ สมาชิก element ที่ i สดมภ์ที่ j ของเมทริกซ์ $\mathbf{B}(q)$

g_i คือ ทอร์กเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (gravity torque)

กระทำต่อแกน i

สำหรับจุดต่อที่เป็นจุดต่อหมุนจะสามารถหาค่า

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{Pj}^{(ij)} &= \mathbf{z}_{j-1} \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{j-1}) \\ \mathbf{J}_{0j}^{(ij)} &= \mathbf{z}_{j-1} \end{aligned}$$

โดยแกน \mathbf{z}_{i-1} คือ column ที่ 3 ของเมทริกซ์การหมุน \mathbf{R}_{i-1}^0 ,

ดังนั้น $\mathbf{z}_{i-1} = \mathbf{R}_1^0(q_1) \dots \mathbf{R}_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) \mathbf{z}_0$

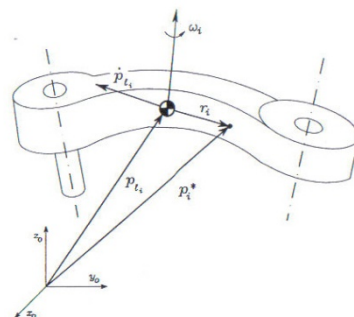
โดยที่ $\mathbf{z}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$

\mathbf{p} คือ ค่า 3 พจน์แรกของ column ที่ 4 ของทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ \mathbf{A}_n^0 ดังนั้น $\mathbf{p} = \mathbf{A}_1^0(q_1) \dots \mathbf{A}_{n-1}^{n-1}(q_n) \mathbf{p}_0$

โดยที่ $\mathbf{p}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$

\mathbf{p}_{i-1} คือ ค่า 3 พจน์แรกของcolumn ที่ 4 ของทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ \mathbf{A}_{i-1}^0 ดังนั้น $\mathbf{p}_{i-1} = \mathbf{A}_1^0(q_1) \dots \mathbf{A}_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) \mathbf{p}_0$

และให้ยึดเวกเตอร์ \mathbf{p} และ \mathbf{p}_{i-1} ตามรูปที่ 6



รูปที่ 6: เวกเตอร์ตำแหน่งของแกนต่างๆที่จะนำไปใช้ในการคำนวณด้วย Lagrange

4. ทดลองความถูกต้องของสมการทางคิเนแมติกส์

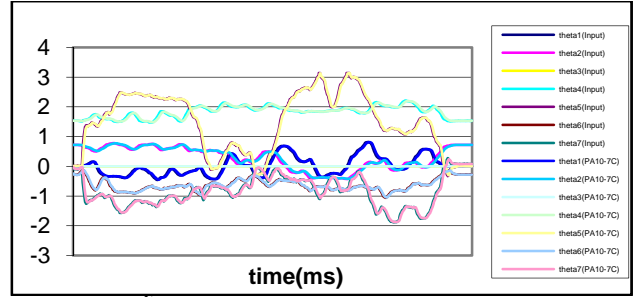
การทดสอบจะแบ่งการทดลองออกเป็น 4 การทดลอง คือ ปรับเปลี่ยนค่ามุมหมุนของแกนอิสระที่เพิ่มขึ้น โดยจะใช้ค่าการทดลองที่ θ สุ่มต่างๆ เพื่อทดลองว่าสมการสามารถใช้ได้ในทุกกรณี โดยค่า θ อิงตามรูปที่ 5 และในแต่ละมุมที่กำหนด จะออกแบบการเคลื่อนที่ในลักษณะอิสระ โดยเส้นทางการเคลื่อนที่จะนำมาจากการใช้หุ่น Phantom Omni (ของ บริษัท SensAble Technologies, Inc.) เคลื่อนที่แล้วส่งค่าตำแหน่งและมุมหมุนที่ต้องการที่เวลาต่างๆ เพื่อนำไปใช้ในการทดสอบว่าเส้นทางที่ส่งไปให้กับสมการที่ได้มาข้างต้นนั้นถูกต้องแม่นยำ

4.1 ผลการทดลองความถูกต้องของสมการอินเวอร์สคิเนแมติกส์

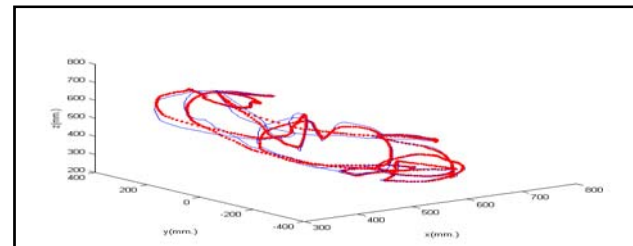
ทดสอบด้วยแขนกล Phantom Omni โดยแขนกล Phantom Omni นี้เป็นแขนชนิด 6 องศาอิสระ เราจะใช้แขนกล Phantom Omni นี้เพื่อสร้างวิถีการเคลื่อนที่แบบอิสระ (freeform path) โดยการเคลื่อนที่ที่แขนกล Phantom ในลักษณะอิสระ (freeform) แขนกล Phantom Omni นี้จะบันทึกค่าทั้งตำแหน่ง (position) และการเรียงตัว (Orientation) โดยเก็บในรูปแบบของทรานส์ฟอร์มเมทริกซ์ จากเมทริกซ์การหมุน (rotation matrix) หรือเมทริกซ์การหมุน ที่วัดมาได้นี้สามารถนำไปคำนวณหามุมออยเลอร์ (Euler angle) ในระบบ ZYZ ได้ การทดลองนี้จะทำการเก็บค่าตามเส้นทางการเคลื่อนที่ปลายแขนของแขนกล Phantom แบบอิสระทุกๆ 10 ms ในรูปของทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ จากนั้นค่าตำแหน่งใน cartesian space ที่ได้จากทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์นี้จะใช้สำหรับการเปรียบเทียบความถูกต้องของสมการอินเวอร์สคิเนแมติกส์ ที่หามาได้ โดยนำค่าเส้นทางการเคลื่อนที่ในรูปของทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ ในแต่ละเวลาสุ่ม (Sampling time) ที่ 10ms ไปแทนค่าในสมการอินเวอร์สคิเนแมติกส์เพื่อคำนวณหาค่ามุมการเคลื่อนที่ของจุดต่อของแขนกล PA10-7C ในพิกัด joint space ที่ต้องเคลื่อนที่เพื่อให้ได้เส้นทางการเคลื่อนที่ของปลายแขนเป็นไปตามแบบการเคลื่อนที่ของแขนกล Phantom

ในการงานวิจัยนี้ได้พัฒนาโปรแกรมที่ใช้ในเชื่อมต่อระหว่างแขนหุ่นยนต์ PA10-7C กับเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการควบคุม โดยใช้ภาษา visual C++ โดยโปรแกรมนี้จะส่งค่าคำสั่งการเคลื่อนที่เชิงมุมของจุดต่อของแขนหุ่นยนต์ PA10-7C ที่คำนวณได้จากสมการอินเวอร์สคิเนแมติกส์โดยใช้ทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ที่ได้จากแขนกล Phantom เมื่อแขนหุ่นยนต์ PA10-7C ได้รับคำสั่งดังกล่าวแล้วจุดต่อต่างๆ ก็จะเคลื่อนที่ตามคำสั่งนั้นแบบ real-time ในขณะที่เดียวกันก็บันทึกมุมที่จุดต่อต่างๆ ทั้ง 7 จุดต่อของแขนหุ่นยนต์ PA10-7C เคลื่อนที่จริง ค่ามุมที่จุดต่อเคลื่อนที่จริงที่วัดได้นี้จะถูกนำไปเปรียบเทียบกับค่ามุมจุดต่อที่คำนวณได้จากสมการอินเวอร์สคิเนแมติกส์โดยใช้ค่าจากทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ที่วัดจากปลายแขนของแขนกล Phantom

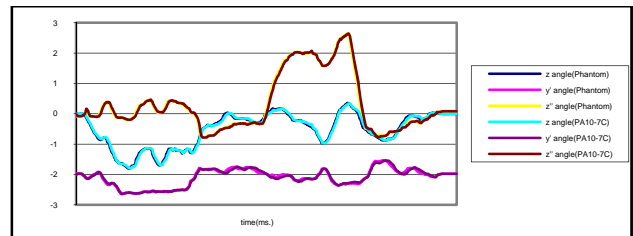
ซึ่งในทุกๆ θ สุ่มต่างๆ จะได้ผลการทดลองดังแสดงในรูปที่ 7 และรูปที่ 8



รูปที่ 7: ค่ามุมทั้ง 7 แกน จากการส่งค่าทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ของปลายแขนกล Phantom ไปยังสมการอินเวอร์สคิเนแมติกส์ของ PA10-7C เปรียบเทียบกับค่ามุมทั้ง 7 ที่ได้จากการเคลื่อนที่จริงของ PA10-7C ผ่านโปรแกรม visual c++



รูปที่ 8: เส้นทางการเคลื่อนที่ของแขนกล Phantom เทียบกับ PA10-7C โดยเส้น "--" แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ของแขนกล Phantom และ "-" แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ของ PA10-7C ในลักษณะ freeform



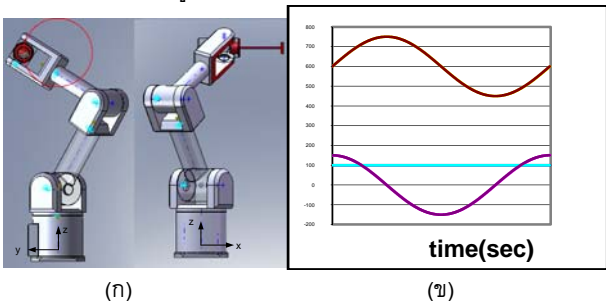
รูปที่ 9: เปรียบเทียบการเรียงตัวของตำแหน่งปลายแขนระหว่างแขนกล PA10-7C กับแขนกล Phantom โดยเป็นการคำนวณมุมออยเลอร์ในรูปแบบ ZYZ

จะเห็นว่าค่าทั้งสองชุดนั้นมีการเลื่อนกันบ้างอันเนื่องมาจากมีเวลาหน่วง (delay time) ในระหว่างการส่งคำสั่งการเคลื่อนที่กับการเคลื่อนที่จริงของแขนกล PA10-7C ส่วนในกรณีของแขนกล Phantom จะมีเวลาหน่วงน้อยกว่ามาก รูปที่ 7 เป็นรูปที่แสดงการเปรียบเทียบค่าตำแหน่งปลายแขนของหุ่นยนต์ PA10-7C กับแขนกล Phantom ในพิกัด Cartesian space จะเห็นว่าผลกระทบเนื่องจากเวลาหน่วงนั้นทำให้ตำแหน่งปลายแขนระหว่างแขนกล PA10-7C กับแขนกล Phantom มีการคลาดเคลื่อนอยู่บ้าง รูป 9 เป็นรูปแสดงการเปรียบเทียบการเรียงตัวของตำแหน่งปลายแขนระหว่างแขนกล PA10-7C กับแขนกล Phantom โดยเป็นการคำนวณมุมออยเลอร์ในรูปแบบ ZYZ จากสมการอินเวอร์สคิเนแมติกส์ จะเห็นว่าค่าใกล้เคียงกันมาก ส่วนของการผิดพลาดก็เนื่องมาจากเวลาหน่วงดังกล่าวมาแล้วนั่นเอง

4.2 ผลการทดลองความถูกต้องของสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว

งานวิจัยนี้จะทำการทดสอบเส้นทางการเคลื่อนที่ในลักษณะวงกลม รัศมี 150 mm. บนระนาบ YZ ด้วยความเร็วเชิงมุมของเส้นรัศมี 0.2π เรเดียนต่อวินาที โดยจะกำหนดค่าความเร็วใน Cartesian space ที่ต้องการเพื่อใช้ในการคำนวณหาความเร็วของแต่ละแกนของหุ่นยนต์ใน joint space จากสมการจาโคเบียนที่หาได้ ค่าความเร็วของแต่ละจุดต่อใน joint space ที่คำนวณได้นี้ จะใช้เป็นค่าตัวแปรที่นำไปทำการจำลองส่งค่าที่ได้ไปทำการจำลองการเคลื่อนที่ด้วยโปรแกรม Solidwork Cosmos Motion แล้วนำเส้นทางที่เคลื่อนที่ได้จากการจำลองการเคลื่อนที่มาทำการเปรียบเทียบกับเส้นทางการเคลื่อนที่ที่ได้จากเส้นทางการเคลื่อนที่ที่กำหนด และนำมาแสดงผลทำการทดสอบที่ คำนวณ θ สุ่มต่างๆ กัน

ผลการทดลองข้างต้นเป็นการทดลองที่ระนาบ θ สุ่มต่างๆ โดยมีรูปแบบการเคลื่อนที่ดังกล่าวแล้ว จะเห็นว่าจากกราฟแสดงการเปรียบเทียบตำแหน่งในพิกัด Cartesian space ระหว่างค่าตำแหน่งของการเคลื่อนที่ซึ่งกำหนดให้ เมื่อเทียบกับตำแหน่งการเคลื่อนที่ซึ่งได้จากการกำหนดค่าความเร็วของจุดต่อแต่ละจุดต่อใน joint space ซึ่งได้มาจากการกำหนดตำแหน่งการเคลื่อนที่และความเร็วที่ต้องการใน Cartesian space ไปในสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว นั้น มีค่าใกล้เคียงกันมากจนเกือบทับกันทั้ง 3 แกนสามารถสรุปได้ว่าสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วหรือสมการจาโคเบียนที่หาได้นั้นมีความถูกต้อง และเมื่อทำการทดลองในระนาบสุ่มต่างๆ ก็ให้ผลการทดลองในลักษณะเดียวกัน ดังรูปที่ 10



รูปที่ 10 การจำลองการเคลื่อนที่ของแขนกล PA10

ในรูปที่ 10 ก.การทดลองการจำลองการเคลื่อนที่ของแขนกล PA10-7C โดยส่งค่าความเร็วเชิงมุมใน joint space ที่จุดต่อต่าง ๆ ซึ่งได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว โดยกำหนดการเคลื่อนที่วงกลมในระนาบ YZ รัศมี 150 มิลลิเมตร ที่ความเร็วเชิงมุมของเส้นรัศมีใน Cartesian space 0.2π เรเดียนต่อวินาที , ข. การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด Cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดการเคลื่อนที่วงกลมในระนาบ YZ รัศมี 150 มิลลิเมตร ที่ความเร็วในพิกัด Cartesian space 0.2π เรเดียนต่อวินาทีกับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว

5. ทดลองความถูกต้องของสมการทางไดนามิกส์

จากสมการการเคลื่อนที่ที่ได้พัฒนาขึ้นตามรายละเอียด ในหัวข้อ 3 ซึ่งมีความซับซ้อนมาก งานวิจัยนี้ได้พัฒนาโปรแกรมจากการเคลื่อนที่ที่ได้จากหัวข้อ 3 โดยมีรายละเอียดของสมการย่อยอื่นที่จำเป็นที่กล่าวไว้ในหัวข้อ 3 สมการการเคลื่อนที่สามารถเขียนได้ดังนี้ คือ

$$\tau_i = \sum_{j=1}^6 b_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 h_{ijk} \dot{q}_k \dot{q}_j + g_i$$

โดยที่ $i = 1, 2, \dots, 6$ (5.1)

และโปรแกรมนี้จะใช้ในการจำลองการเคลื่อนที่โดยกำหนดการเคลื่อนที่อ้างอิงให้ ดังหัวข้อถัดไป

5.1 ผลการทดสอบความถูกต้องของโครงสร้างของสมการการเคลื่อนที่

การทดสอบความถูกต้องของสมการพลศาสตร์ของแขนกลนั้นสามารถพิจารณาได้หลายส่วน เช่น ความผิดพลาดจากค่าพารามิเตอร์ของตัวแขน เช่น ความยาวแขน จุดต่อต่าง ๆ หรือค่าความแม่นยำของเทอมต่าง ๆ ที่ประกอบอยู่ในสมการพลศาสตร์ของแขนกลที่หามาได้ ค่าความผิดพลาดหรือไม่แน่นอนนี้เรียกว่า parametric uncertainties นอกจากค่าความผิดพลาดนี้แล้วก็อาจจะมีค่าความผิดพลาดอันเนื่องมาจากตัวระบบซึ่งหมายถึงระดับหรือ order ของระบบหรือเรียกว่า unstructured uncertainties หรือ unmodeled dynamics ซึ่งค่าความผิดพลาดนี้สามารถลดได้โดยใช้ตัวควบคุมแบบ robust control หรือแบบ adaptive control แต่การควบคุมทั้งสองแบบนี้จำเป็นจะต้องมีคุณสมบัติหนึ่งที่ใช้สำหรับประกันความเสถียรภาพของตัวควบคุมนั้นคือ Skew Symmetric Matrix ของความสัมพันธ์ของเมทริกซ์ $N(q, \dot{q})$ ซึ่งจะมีคุณสมบัติ ดังนี้

$$N(q, \dot{q}) = \dot{B}(q) - 2C(q, \dot{q})$$

ความสัมพันธ์นี้จะมีประโยชน์มากในการออกแบบตัวควบคุมแบบ Robust และตัวควบคุมแบบ Adaptive และเนื่องจากว่าไม่สามารถหาสมการพลศาสตร์ของระบบได้แม่นยำถูกต้องร้อยเปอร์เซ็นต์ ดังนั้น จำเป็นต้องหาแบบจำลองที่มีโครงสร้างถูกต้องและสามารถใช้ในระบบควบคุมขั้นสูงต่อไป จึงต้องแน่ใจว่าโครงสร้างของสมการพลศาสตร์ที่หามาได้มีเมทริกซ์ $N(q, \dot{q})$ ที่มีลักษณะเป็น Skew-Symmetric

ซึ่งเมื่อเทียบพจน์กับสมการ (3.3) จะสามารถหา เมทริกซ์ $N(q, \dot{q})$ ได้จาก

$$n_{ij} = \dot{b}_{ij} - 2c_{ij} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \quad (5.1.1)$$

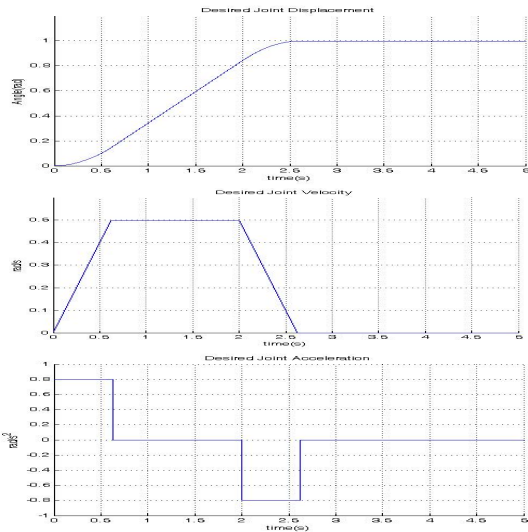
โดยสมการที่ (5.1.1) จะได้ เมทริกซ์ $N(q, \dot{q})$ จากนั้นทดสอบความเป็น Skew-Symmetry จาก $n_{ij} = -n_{ji}$

จากการวิเคราะห์ผ่านโปรแกรมดังกล่าวข้างต้นได้ผลคือ สมการการเคลื่อนที่โดยแทนค่าพารามิเตอร์ต่างๆของหุ่นยนต์แขนกล PA10-7C เป็นเมทริกซ์ที่มีคุณสมบัติความเป็น Skew-Symmetry ทำให้ทราบ

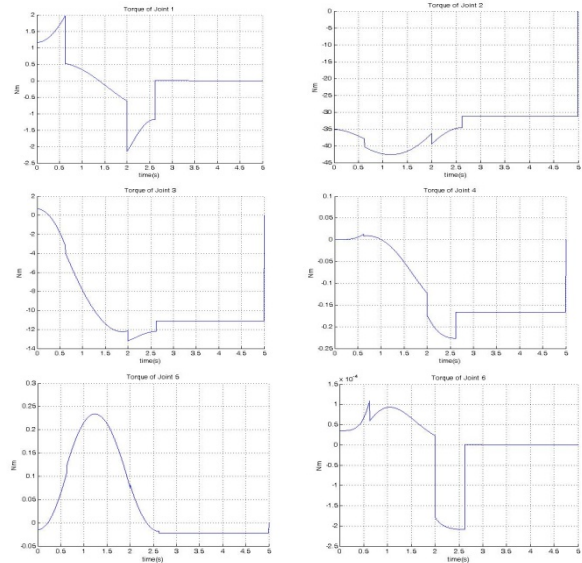
ว่าสมการการเคลื่อนที่มีโครงสร้างที่ถูกต้อง

5.2 ผลการทดสอบโดยแทนค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ลงในสมการการเคลื่อนที่

ในหัวข้อนี้ จะทดสอบดูแนวโน้มการทำงานของสมการการเคลื่อนที่สมการที่ (5.1) และตรวจสอบความมีเสถียรภาพของสมการโดยวิธีการจำลองการเคลื่อนที่ โดยจะกำหนดค่าเส้นทางเดินอ้างอิง (reference path) ของจุดต่อต่างๆ โดยจะทดสอบกับสมการการเคลื่อนที่สำหรับแขนกล 6 แกน กำหนดให้จุดต่อที่ 3 ยังไม่มีการเคลื่อนที่มี angular velocity profile เป็นแบบคางหมูดังแสดงในรูปที่ 11ข และความเร่งเชิงมุม ดังแสดงในรูปที่ 11ค จาก velocity profile นี้สามารถนำไปใช้คำนวณหา position profile ของจุดต่อต่างๆ ได้ตามรูปที่ 11ก จากค่าการเคลื่อนที่อ้างอิงที่แสดงในรูปที่ 11 นี้ กับค่าพารามิเตอร์ของตัวแขนหุ่นยนต์ เราสามารถนำไปแทนในสมการที่ (5.1) และหาแกสมการเพื่อค่าแรงบิดทั้ง 7 จุดต่อได้จากสมการนี้ ดังแสดงในรูปที่ 12 ผลลัพธ์จากการคำนวณหาค่าแรงบิดที่แต่ละจุดต่อนี้จะเห็นว่ามีความเสถียร และแรงบิดที่ได้ก็มีลักษณะไปในทางเดียวกับความเร่งอ้างอิงตามรูป 11ค กล่าวคือมีช่วงที่แรงบิดเพิ่มขึ้น แรงบิดคงที่ และแรงบิดลดลง ซึ่งทำให้พอจะมั่นใจในระดับหนึ่งว่าสมการพลศาสตร์ของแขนหุ่นยนต์ที่หามาได้นี้หรือสมการที่ (5.1) มีความถูกต้องในระดับหนึ่ง ซึ่งในความเป็นจริงแล้วคุณสมบัติ Skew Symmetric matrix ในหัวข้อ 5.1 นั้นมีความสำคัญมากกว่า เนื่องจากจะมีบทบาทมากสำหรับการออกแบบระบบควบคุมขั้นสูงต่อไป



รูปที่ 11: ค่ามุม ความเร็วเชิงมุม และความเร่งเชิงมุมที่ใช้ในการทดสอบความเสถียรของสมการการเคลื่อนที่



รูปที่ 12: ค่าแรงบิดของทั้ง 6 แกนที่ได้จากสมการการเคลื่อนที่โดยการแทนค่ามุม ความเร็ว และความเร่งในสมการ (5.1)

6. สรุป

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นงานวิจัยเพื่อหาสมการที่มีความสำคัญสำหรับการนำไปพัฒนาใช้ในการควบคุมแขนกล 7 แกน ที่มีลักษณะการตั้งแกนในรูปแบบเดียวกับหุ่นยนต์แขนกล PA10-7C ทั้งโดยการควบคุมผ่านทางคิเนแมติกส์ และ ทางไดนามิกส์ โดยในส่วนของ การควบคุมผ่านทางคิเนแมติกส์ สามารถควบคุมได้ผ่านสมการอินเวอร์สคิเนแมติกส์ และ สมการเชิงความเร็ว และการควบคุมทางด้านไดนามิกส์ สามารถควบคุมผ่านสมการการเคลื่อนที่ที่หามาได้ ซึ่งทั้งหมดที่กล่าวมานั้นได้ทำการวิเคราะห์ คำนวณ ทดสอบจำลองการเคลื่อนที่ ซึ่งแสดงให้เห็นความถูกต้องแม่นยำของสมการต่างๆ ที่ได้วิเคราะห์มา จึงสามารถนำสมการดังกล่าวไปใช้ในการควบคุมแขนกลที่มีลักษณะโครงสร้างเช่นเดียวกัน PA10-7C ได้อย่างถูกต้อง

เอกสารอ้างอิง

1. John M. Hollerbach. Optimum Kinematic Design for a Seven Degree Of Freedom Manipulator. Robotics Research, Kyoto, Japan, Aug. 20-23, 1984: 215-222.
2. Lorenzo Sciacivico and Bruno Siciliano. Modeling and Control of Robot Manipulators, Int. Edition, 1996.
3. Hollerbach, J. M., and Sahar, G., Wrist partitioned inverse kinematic accelerations and manipulation dynamics, Int. Robotics Research 2(1983): 61-76.
4. D. N. Nenchev, Y. Tsumaki and M. Uchiyama. singularity-consistent parameterization of robot motion and control. The International Journal of Robotics Research 19, 2(February 2000): 159-182.
5. วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ. การควบคุมระบบพลศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2548.
6. Sangveraphunsiri, V., Tantawiroon, N. 2003. Novel design of

a 4dof parallel robot Proc. JSAE Annual Congress, Japan.

7. Viboon Sangveraphunsiri, Tawee, Ngamvilaikorn. Design and Development of a Six DOF Master-Slave Human-Assisted Arm. JSAE Annual Congress, July, 2002.